

ELEMENTE DES VARIATIONSKALKÜLS

Leonhard Euler

Bald nach dem Fund der Prinzipien des Differentialkalküls sind die Probleme solcher Art behandelt zu werden begonnen worden, die eine völlig einzigartige Anwendung dieses Kalküls erforderten. Weil nämlich das Geschenk des Differentialkalküls hauptsächlich darin besteht, dass nach Vorlegen irgendeiner Funktion der variablen Größe x ihr Zuwachs gesucht wird, während die Größe x und ihr Differential dx zu wachsen angenommen wird, war es nach einer Übertragung auf die Geometrie ein Leichtes, daher die Tangenten und die Krümmungen selbst der gekrümmten Linien zu bestimmen, die Untersuchung welcher Sachen sofort aus der Natur der Differentiale deriviert wird. Anders hingegen ist die Art solcher Probleme beschaffen, in denen unzählige in einer gewissen allgemeinen Gleichung enthaltenen gekrümmten Linien vorgelegt werden, von denen in Bezug auf die Länge gleiche Bögen oder die von einem schweren herabsinkenden Körper in derselben Zeit durchlaufen werden, abgetrennt werden müssen, aus welcher letzten Art das Problem der synchronen Kurven entstanden ist. Bei diesen Fragen ist nämlich nicht anzusehen, einen wie großen Zuwachs die Ordinate einer Kurve erfährt, während die Abszisse um ihr Differential vermehrt wird, wie, das wie sehr die Länge des Bogens aber die Zeit des Herabsinkens durch denselben hindurch variiert werden wird, wenn der Bogen selbst in einer anderen Kurve genommen wird. Solche Probleme werden durch die Differentiation von Parametern aufgelöst zu werden gesagt, weil ja die Variabilität eines Parameters alle vorgelegten unzähligen Kurven umfasst. Damit aber deutlicher das Prinzip erkannt wird, aus welchem die Lösung von Problemen dieser Art herzuholen ist, sei irgendeine Gleichung zwischen der Abszisse x und der Ordinate y vorgelegt, die darüber hinaus die Parameter zu nennende Konstante Größe a enthalte; solange diese denselben Wert behält, wird die Gleichung eine gewisse gekrümmte Linie liefern, aber wenn a nacheinander die einen und die anderen Werte zugeteilt

werden, werden ununterbrochen andere gekrümmte Linien entstehen. Wenn daher nun die Frage von Bögen dieser Kurven handelt, weil ja der Bogen jeder Kurve durch

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ausgedrückt wird, in welcher Integration der Parameter a für konstant gehalten wird, geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass der Zuwachs der Integralformel $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ bestimmt wird, welchen sie erhält, während in ihr anstelle der Größe a dieselbe um ihren Zuwachs da vermehrt eingesetzt wird. Allgemein also, wenn anstelle des Bogens irgendein anderer Integralausdruck $\int Zdx$ behandelt wird, welche Integration aus der zwischen x und y gegebenen Gleichung zu erledigen ist, wobei der Parameter a für konstant zu halten ist, wird gefragt, eine wie große Variation derselbe Ausdruck $\int Zdx$ schon integriert erfahren wird, wenn in der zwischen x und y gegebenen Gleichung der Parameter a um das Element da vermehrt wird. Zu selbigem ist auch jenes berühmte Problem der orthogonalen Trajektorien zu zählen, in welchem auch unendlich viele in einer gegebenen Gleichung zwischen der Abszisse x , der Ordinate y und dem variablen Parameter enthaltenen gekrümmten Linien vorgelegt werden und eine gekrümmte Linie solcher Art gesucht wird, die alle jene in rechten Winkeln schneidet. Um dieses Problem zu lösen, pflegt die Ordinate y wie eine Funktion von x und a betrachtet zu werden, aus deren Differentiation eine solche Form

$$dy = p dx + q da$$

zu entstehen aufgefasst wird; dann aber wird zu dieser Differentialgleichung gelangt werden

$$dx(1 + pp) + pq da \quad \text{oder zu dieser} \quad dx + p dy = 0,$$

aus welcher mit jener verbunden der Parameter a eliminiert werden kann, sodass eine die Natur der gesuchten Kurve ausdrückende Gleichung zwischen x und y gefunden wird. Wann immer freilich die zu schneidenden Kurven durch eine algebraische Gleichung zwischen x und y gegeben sind, hat die Sache keine Schwierigkeit, weil dann der Wert von y uneingeschränkt durch x und a bestimmt werden wird und dann durch Differentiation die Werte der Buchstaben p und q angegeben werden können, woher eine Differentialgleichung zwischen den nur zwei Variablen x und a erhalten wird; aber, wenn die für die zu schneidenden Kurven selbst schon eine differentiale den Parameter

a sowie eine konstante Größe involvierende Gleichung ist, die deshalb von dieser Form $dy = p dx$ oder $y = \int p dx$ sein wird, muss vor allem untersucht werden, eine Differentialgleichung von welcher Art hervorginge, wenn außer x auch der Parameter a sowie eine Variable festgelegt wird, dass daher die Größe q bekannt wird; diese Untersuchung ist oftmals höchst schwierig und scheint daher die Kräfte der Analysis zu übersteigen. Auch wenn aber die Methode dieser Untersuchung allein aus dem Prinzip des Differentialkalküls zu entnehmen ist, wird dennoch in der Behandlung selbst ein riesiger Unterschied erkannt, deshalb weil eine gewöhnliche Differentiation keiner Schwierigkeit unterworfen zu sein pflegt, hier die Schwierigkeit im Finden der aus der Variabilität der Parameter herstammenden Differentiale gelegen ist und dieser Fund selbst besondere Regeln erfordert. Deswegen werden nicht wider Notwendigkeit die Anteile der Analysis des Unendlichen vervielfacht zu werden scheinen, wenn wir eine Untersuchung dieser Art der Differentiale, die aus der Variabilität des Parameters entstehen, zu einem speziellen Kalkül zählen, welcher sich der Unterscheidung wegen Variationskalkül nennen lässt. Dessen Notwendigkeit wird noch deutlicher erkannt werden, wenn wir erwägen, dass sein Vermögen sich um vieles weiter erstreckt als allein auf die Variabilität des Parameters; auch wenn mit selbigem die gekrümmten Linien ins Unendliche vermehrt werden, werden sie dennoch immer in einer gewissen Art, welche natürlich in der gegebenen Gleichung enthalten ist, erfasst werden. Es wird aber gefällig sein, dass unser Variationskalkül nicht nur auf bestimmte Arten von Kurven dieser Gattung ausgedehnt wird, sondern auch auf ganz und gar alle Kurven, die freilich aufgefasst werden können, wie wenn beispielsweise unter vollkommen allen Kurven die zu bestimmen ist, die sich einer gewissen gegebenen Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreut. Und hierzu wird auch jenes sehr berühmte und in weitesten Sinne aufgelöste isoperimetrische Problem zu zählen sein, wie ich es freilich in einem besonderen Buch behandelt habe; wer dieses aufmerksam gelesen hat, wird nicht bezweifeln, dass das Untersuchen dieses Kalküls dieser Art eine völlig einzigartige von den üblichen Regeln der Analysis verschiedene Gattung erfordert. Diese Probleme werden nämlich auf eine solche Frage zurückgeführt, dass eine Gleichung solcher Art zwischen den zwei Variablen x und y bestimmt wird, aus welcher ein gewisser Integralausdruck $\int Z dx$, wie auch immer Z durch x und y zusammengesetzt wird, einen maximalen oder minimalen Wert erhält. Um dies aber zu erwirken, ist es notwendig, dass nach Vorlegen irgendeiner Formel dieser Art $\int Z dx$, die freilich aus einer gewissen angenommenen Relation zwischen x und y einen bestimmten

Wert erhält, im Allgemeinen bestimmt wird, eine wie große Veränderung die Formel auf sich nehmen wird, wenn die Relation zwischen x und y selbst unendlich wenig auf irgendeine Weise variiert wird; und diese Frage erstreckt sich schon unendlich fach weiter als die obere, wo nur die aus der Variation des Parameters herstammende Veränderung angegeben werden musste. Es kann auch anstelle der einfachen Integralformel $\int Zdx$ ein Ausdruck betrachtet werden, der irgendwie aus x, y und den Differentialen und Integralformeln zusammengesetzt ist, damit diese Behandlung weiter ausgedehnt wird; dann aber wird das Variationskalkül Regeln bereit stellen, die Veränderung von Ausdrücken dieser Art zu bestimmen, die wegen der irgendwie unendlich wenig veränderten Relation der Variablen x und y selbigen aufgeprägt wird. Freilich suggeriert die in der Lösung der isoperimetrischen für gewöhnlich verwendete Methode schon außergewöhnliche Beispiele dieses Kalküls, weil welche aber aus einer quasi fremden Quelle, der Geometrie natürlich, geschöpft worden sind, können sie nicht zur Grundlegung der Prinzipien dieses verlangten Kalküls gezählt werden. Desweiteren aber sind diese Beispiele auf einen zu speziellen Zweck beschränkt, als dass sie die Weite unseres Kalküls umfassen können. Deswegen habe ich beschlossen, seine Elemente aus den ersten Prinzipien der Analysis zu entnehmen und sie so zu entwickeln, dass sie nicht nur zur leichten und gefälligen Lösung der oben erwähnten Probleme dienen können, sondern auch einen quasi neuen, sich auf viele andere Arten solcher Fragen erstreckenden Fall eröffnen, worin die Geometer nicht ohne eine außergewöhnliche Fortbewegung der Analysis ihre Kräfte erproben können.

ANNAHME 1

§1 Es sei zwischen den zwei Variablen x und y irgendeine Gleichung gegeben, mit welcher deren gegenseitige Relation ausgedrückt werde, sodass daher, welcher bestimmte Wert auch immer x zugeteilt wird, auch ein bestimmter Wert für y definiert wird.

KOROLLAR 1

§2 Nachdem also irgendeine Gleichung zwischen den beiden Variablen x und y vorgelegt wurde, werden den einzelnen Werten von x , welche auch

immer aufgefasst werden können, bestimmte Werte von y entsprechen.

KOROLLAR 2

§3 Vermöge dieser vorgelegten Gleichung wird also y eine gewisse Funktion von x sein und, wie x y entspricht, so wird auch dem nachfolgendem Wert jenes $x' = x + dx$ $y' = y + dy$ entsprechen, dessen Differenz vom vorhergehenden y , nämlich das Differential dy , durch die gewöhnlichen Regeln des Differentierens angegeben werden können wird.

KOROLLAR 3

§4 Weil y eine Funktion von x ist, wird auch $\frac{dy}{dx}$ eine durch die gegebene Relation zwischen x und y angebbare Funktion von x sein; und wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird, wird auf gleiche Weise $\frac{dp}{dx}$ eine gewisse Funktion von x sein; und wenn wir weiter $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, $\frac{dr}{dx} = s$ etc. setzen, werden auch diese Größen q , r , s etc. gewisse ebenso durch die zwischen x und y gegebene Relation angebbare Funktionen sein.

KOROLLAR 4

§5 Wenn darauf V ein auf irgendeine Weise aus x und y zusammengesetzter Ausdruck ist, wird er auch mit Hilfe der zwischen x und y gegebenen Relation so beschaffen sein, dass er für alle Werte von x bestimmte Werte erhält. Und wenn V' den folgenden oder den $x + dx$ entsprechenden Wert bezeichnet, wird $V' = V + dV$ oder $dV = V' - V$ sein, gemäß der ersten Prinzipien des Differentialkalküls.

ANNAHME 2

§6 Was für eine Relation auch immer zwischen x und y vorgelegt wird, da daher zugleich die Relation der Differentiale dx und dy bekannt wird, werde

ich im Folgenden durchgehend festlegen:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q, \quad \frac{dq}{dx} = r, \quad \frac{dr}{ds} = s \quad \text{etc.},$$

und es werden p, q, r, s etc. genauso wie y durch jene gegebene Relation angebbare Funktionen von x sein.

KOROLLAR 1

§7 Wie der Buchstabe p die Relation der Differentiale dx und dy enthält, so wird q die Relation der Differentiale zweiten Grades umfassen, r aber die Differentiale dritten Grades, s die vierten Grades etc.

KOROLLAR 2

§8 Umgekehrt werden also auch, wenn in diesem Ausdruck V Differentiale entweder erster oder zweiter oder gar höherer Ordnung enthalten sind, diese durch Einführen dieser Größen p, q, r, s etc. aus der Rechnung beseitigt werden können.

AXIOM

§9 Wenn zwischen den Variablen x und y eine andere von der vorgelegten unendlich wenig abweichende Relation festgelegt wird, werden die Werte von y , die den einzelnen Werten von x entsprechen, von diesen, welche die vorgelegte Relation liefert, unendlich wenig abweichen.

KOROLLAR 1

§10 Weil eine variierte Relation dieser Art sich auf unendlich viele Weisen von der vorgelegten Relation unterscheiden kann, sodass der Unterschied unendlich klein ist, kann es sich ereignen, dass ein oder mehrere Werte von y , die gewissen Werten von x entsprechen, daher keine Veränderung erfahren.

KOROLLAR 2

§11 Diese Variation der Relation kann so allgemein aufgefasst werden, dass daher alle Werte von y irgendwelche Veränderungen erhalten, damit sie auf keine Weise voneinander abhängen. Damit sich also diese Behandlung sehr weit erstreckt, wird es gefällig sein, dass die Variation der Relation sehr allgemein aufgefasst verstanden wird.

ANNAHME 3

§12 Wenn die zwischen x und y vorgelegte Relation ein wenig verändert wird, wollen wir den Wert von y , der daher x entspricht, durch $y + \delta y$ bezeichnen, sodass δy die Variation kennzeichnet, welche y wegen der variierten Relation erfährt.

KOROLLAR 1

§13 Weil auf die gleiche Weise y' der $x + dx$ vermöge der vorgelegten Relation entsprechende Wert ist, wollen wir einen Wert, der demselben $x + dx$ vermöge der variierten Relation entspricht, durch $y' + \delta y'$ ausdrücken, sodass $\delta y'$ die Variation von y' bezeichnet, die aus der Variation der Relation entsteht.

KOROLLAR 2

§14 Weil also $y' = y + dy$ ist, wird gelten

$$\delta y' = \delta(y + dy) = \delta y + \delta dy \quad \text{und} \quad \delta dy = \delta y' - \delta y.$$

Es wird aber δdy die aus der Variation zwischen x und y entstehende Variation von dy bezeichnen.

KOROLLAR 3

§15 Wie aber y' den folgenden Zustand von y bezeichnet, wobei natürlich der folgende Zustand auf $x + dx$ bezogen wurde, so bezeichnet $\delta y'$ den folgenden Zustand von δy , woher $\delta y' - \delta y$ das Differential von δy ausdrücken wird, welches $d\delta y$ ist. Weil also $\delta dy = \delta y' - \delta y$ ist, wird $\delta dy = d\delta y$ sein.

KOROLLAR 4

§16 Daher erhalten wir also diese außergewöhnliche Eigenschaft, dass die Variation des Differentials von y gleich dem Differential der Variation von y ist. Es ist nämlich δdy die Variation von dy , d. h. des Differentials von y , und $d\delta y$ ist das Differential von δy , d. h. der Variation von y .

DEFINITION 1

§17 Wenn V ein irgendwie aus x und y zusammengesetzter Ausdruck ist, nach Vorlegen einer gewissen Relation zwischen x und y , ist die Variation, welche ich durch δV bezeichnen werde, der Zuwachs, welchen die Größe V erfährt, wenn die zwischen x und y vorgelegte Relation unendlich wenig verändert wird.

KOROLLAR 1

§18 Sorgsam also müssen das Differential dV und die Variation δV unterschieden werden; das Differential bezeichnet nämlich den Zuwachs von V , während x um sein Element dx vermehrt wird, während die zwischen x und y vorgelegte Relation dieselbe bleibt; die Variation hingegen bezeichnet den Zuwachs von V , während die Relation selbst variiert wird und x dasselbe bleibt.

KOROLLAR 2

§19 Weil durch die Variation der zwischen x und y vorgelegten Relation die Größe y den Zuwachses δy erfährt, während x dasselbe bleibt, wie auch immer die Größe V aus x und y zusammengesetzt war, wird ihre Variation gefunden werden, wenn anstelle von y überall $y + \delta y$ geschrieben wird und von daher für V zu entstehenden Wert der Wert V selbst subtrahiert wird.

KOROLLAR 3

§20 Wenn natürlich in V überall $y + \delta y$ für y geschrieben wird, wird der variierte Wert von V hervorgehen, der $V + \delta V$ ist; die Variation selbst aber wird gefunden, wenn vom variierten Wert $V + \delta V$ der erste Wert V subtrahiert wird.

DEFINITION 2

§21 Das Variationskalkül ist die Methode die Variationen irgendwie aus den zwei Variablen x und y zusammengesetzten Größen zu finden, welche sie erfahren, wenn die zwischen x und y vorgelegte Relation unendlich wenig auf irgendeine Weise verändert wird.

KOROLLAR 1

§22 Nachdem also irgendeine Relation zwischen x und y vorgelegt wurde, wenn V eine auf irgendeine Weise von x und y abhängende Funktion bezeichnet, lehrt dieses Kalkül, die Variation von V oder den Wert von δV zu finden.

KOROLLAR 2

§23 Weil wir die zwischen x und y gegebene Relation irgendwie verändert zu werden annehmen, dass y für die einzelnen Werte von x irgendwelche Variationen, die sogar voneinander nicht abhängen, erhalten, erstreckt sich

dieses Kalkül sehr weit und wird an gewisse Bedingungen der Variationen angepasst werden können.

BEMERKUNG 1

§24 Damit der Gebrauch dieses Kalküls deutlicher erkannt werden kann, wollen wir ein Beispiel anführen. Es sei also diese Relation zwischen x und y vorgelegt

$$aayy - b bxx = aabb,$$

die durch Schreiben von $b + db$ anstelle von b unendlich wenig verändert wird. Wenn nun eine gewisse von x und y abhängende Größe vorgelegt wird, wie beispielsweise

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}},$$

wird die von dieser aus einer Veränderung der Relation herstammende Variation mit Hilfe dieses Kalküls dargeboten werden können; weil nämlich gilt

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{aa - xx},$$

wird sein

$$\delta y = \frac{db}{a} \sqrt{aa - xx},$$

welches die Variation von y ist. Wie aber aus der bekannten Variation von y die daher entstehenden Variationen von irgendwie von y und x abhängenden Größen, und daher auch von dieser

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}},$$

bestimmt werden können, ist in diesem Kalkül zu zeigen; daher ist klar, dass alles, was über die Variabilität von Parametern schon überall verstreut angegeben wurde, hier enthalten ist. Des Weiteren können aber auch die Fragen umgekehrt werden, wie wenn beispielsweise nach Vorlegen einer Formel dieser Art

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}}$$

die Relation zwischen x und y gesucht wird, woher die Variation dieser Formel von gegebener Größe oder auch keiner hervorgeht, in welchem letzten Fall die gefundene Relation der vorgelegten Formel den maximalen oder minimalen Wert aufzeigen wird; und hierzu werden alle Probleme zu zählen sein, die über sich der Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfreuender Kurven bis jetzt behandelt worden sind.

BEMERKUNG 2

§25 Die Vorschriften dieses Kalküls sind an die Diversität der Art und Weise, auf welche eine gewisse vorgelegte Formel V von den zwei Variablen x und y abhängt, anzupassen, weil wenn welche Diversität unendlich ist, es gefällig sein wird, dass sie auf einige gewisse besondere Gattungen zurückgeführt wird. Die erste Art umfasse also die Formeln, welche aus den Größen x und y und den Derivierten

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx} \quad \text{etc.}$$

wie auch immer zusammengesetzt sind, dennoch so, dass sie keine Integralformeln involvieren. Zur zweiten Art zähle ich die Formeln, die Integrale von dieser Art $\int Zdx$ enthalten, dennoch so, dass die Formel Z selbst sich auf die erste Gattung bezieht. Die dritte Art wird Formeln solcher Art erfassen, in denen nicht nur Integrale $\int Zdx$ enthalten sind, sondern darüber hinaus die Größe Z ebenfalls Integrale involviert. Schließlich wird die vierte Art folgen, in welcher die zu variierende Formel V nicht absolut, sondern erst durch eine Differentialgleichung entweder ersten oder sogar höheren Grades definiert wird, welche Art sich natürlich am Weitesten erstreckt und alle vorhergehenden in sich umfasst. Was aber die Gleichung, mit welcher die Relation zwischen x und y ausgedrückt wird, betrifft, auch wenn ich sie als gegeben ansehe, setze ich sie dennoch nicht fest, damit die anzugebenden Vorschriften auf keine Weise beschränkt werden.

THEOREM 1

§26 Die Variation des Differentials einer Größe V ist gleich dem Differential der Variation derselben Größe oder es ist $\delta dV = d\delta V$.

BEWEIS

Weil $dV = V' - V$ ist, während V' den folgenden Wert von V bezeichnet, der $x + dx$ entspricht, wie V x entspricht, wird $\delta dV = \delta V' - \delta V$ sein; aber $d\delta V$ drückt die Differenz zwischen δV und seinem folgenden Wert aus, der $\delta V'$ ist, sodass $d\delta V = \delta V' - \delta V$ ist, woher klar ist, dass $\delta dV = d\delta V$ ist.

KOROLLAR 1

§27 Auf dieselbe Weise, wenn wir dV anstelle von V schreiben, ist klar, dass $\delta ddV = d\delta dV$ ist; aber es ist $\delta dV = d\delta V$, woher $d\delta dV = dd\delta V$ ist, und so werden diese drei Formeln einander gleich sein

$$\delta ddV = d\delta dV = dd\delta V.$$

KOROLLAR 2

§28 Weiter aber, wenn wir auch dV hier für V schreiben, werden wir die Gleichheit zwischen diesen vier Formen erhalten

$$\delta dddV = d\delta ddV = dd\delta dV = ddd\delta V,$$

dann aber zwischen diesen fünf

$$\delta d^4V = d\delta d^3V = d^2\delta d^2V = d^3\delta dV = d^4\delta V.$$

KOROLLAR 3

§29 Wenn man das Differential irgendeiner Ordnung von V , natürlich $d^n V$, hat, dessen Variation zu finden ist, wird gelten

$$\delta d^n V = d^m \delta d^{n-m} V = d^n \delta V,$$

es wird natürlich dem Differential der Ordnung n der Variation δV selbst gleich. Daher wird die Variation von Differentialen auf die Differentiation der Variation zurückgeführt.

PROBLEM 1

§30 Die Variationen der das Verhältnis der Differentiale von x und y in sich enthaltenden Größen p, q, r, s etc. sind zu bestimmen.

LÖSUNG

Weil die Variation sich nicht auf x zu beziehen angesehen wird, wird $\delta x = 0$ sein und die Variation von y , natürlich δy , wird als konkret angesehen. Daher, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, wird sein

$$\delta p = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}.$$

Darauf wird wegen $q = \frac{dp}{dx}$ sein

$$\delta q = \frac{\delta dp}{dx} = \frac{d\delta p}{dx};$$

für konstant genommenes Element dx ist aber $d\delta p = \frac{dd\delta y}{dx}$ und daher

$$\delta q = \frac{dd\delta y}{dx^2} \quad \text{und} \quad d\delta q = \frac{d^3\delta y}{dx^3}.$$

Weiter aber, weil $r = \frac{dq}{dx}$ ist, wird gelten

$$\delta r = \frac{\delta dq}{dx} = \frac{d\delta q}{dx} \quad \text{und daher} \quad \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3},$$

woher die Variationen der aus x und y derivierten Größen p, q, r, s etc. sich so verhalten werden

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx}, \quad \delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \quad \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3}, \quad \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4} \quad \text{etc.,}$$

wenn freilich das Element dx konstant angenommen wird.

KOROLLAR 1

§31 Diese Differentiale ersten und auch höheren Grades der Variation δy werden durch die Variationen der Werte von y bestimmt, die den folgenden Werten von x entsprechen, natürlich $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$ etc. Wenn nämlich die folgenden Werte von y so dargeboten werden y' , y'' , y''' , y'''' etc. und deren Variationen so $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$, $\delta y''''$ etc., wissen wir aus der Natur der Differentiale, dass gilt

$$\begin{aligned} d\delta y &= \delta y' - \delta y, \\ dd\delta y &= \delta y'' - 2\delta y' + \delta y, \\ d^3\delta y &= \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

KOROLLAR 2

§32 Wenn also allein der Wert y eine Variation erfahren würde, die folgenden y' , y'' , y''' etc. hingegen keiner unterworfen wären, sodass $\delta y' = 0$, $\delta y'' = 0$, $\delta y''' = 0$ etc. wäre, wäre

$$d\delta y = -\delta y, \quad dd\delta y = +\delta y, \quad d^3\delta y = -\delta y, \quad d^4\delta y = +\delta y \quad \text{etc.}$$

und daher

$$\delta p = -\frac{\delta y}{dx}, \quad \delta q = +\frac{\delta y}{dx^2}, \quad \delta r = -\frac{\delta y}{dx^3}, \quad \delta s = +\frac{\delta y}{dx^4} \quad \text{etc.}$$

PROBLEM 2

§33 Wenn V eine auf irgendeine Weise aus x und y und deren Differentialen irgendeiner Ordnung zusammengesetzte Größe war oder wenn sie irgendeine Funktion der Größen x , y , p , q , r , s etc. war, ist ihre Variation δV zu bestimmen.

LÖSUNG

Es werde auf die übliche Weise diese Funktion V differentiert und es gehe hervor

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{etc.},$$

welches Differential nichts anderes ist, außer der Zuwachs, welchen die Funktion V erfährt, wenn anstelle der Größen x, y, p, q, r, s etc. diese $x + dx, y + dy, p + dp, q + dq, r + dr$ etc. eingesetzt werden. Auf die gleiche Weise, wenn für x, y, p, q, r, s etc. diese eingesetzt werden

$$x + 0, \quad y + \delta y, \quad p + \delta p, \quad q + \delta q, \quad r + \delta r, \quad s + \delta s \quad \text{etc.},$$

wird der Zuwachs, welchen die Funktion V daher erhält, ihre Variation sein

$$\delta V = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{etc.}$$

Daher, wenn für $\delta p, \delta q, \delta r$ etc. die oben gefundenen Werte geschrieben werden, wird die gesuchte Variation hervorgehen

$$\delta V = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} \quad \text{etc.}$$

THEOREM 2

§34 Nach Vorlegen irgendeiner Integralformel $\int Zdx$ ist ihre Variation gleich der dem Integral der Variation des Differentials Zdx oder es wird sein

$$\delta \int Zdx = \int \delta Zdx.$$

BEWEIS

Weil $\int Zdx$ die Summe aller Zdx ausdrückt, wird ihre Variation $\delta \int Zdx$ die Summe aller Variationen von Zdx erfassen oder es wird $\delta \int Zdx = \int \delta Zdx$ sein. Dies kann auch auf diese Weise sorgfältiger gezeigt werden: Es sei $\int Zdx = V$, sodass δV bestimmt werden muss; weil also $dV = Zdx$ ist, wird $\delta dV = \delta Zdx = d\delta V$ sein, woher nach Nehmen von Integralen $\delta V = \int \delta Zdx$ werden wird.

PROBLEM 3

§35 Nach Vorlegen der Integralformel $\int Zdx$, in welcher Z eine auf irgendeine Weise aus x und y und deren Differentialen irgendeiner Ordnung zusammengesetzte Größe ist, ist ihre Variation $\delta \int Zdx$ zu finden.

LÖSUNG

Weil also Z eine Funktion von x, y, p, q, r, s etc. ist, wird ihr Differential auf die übliche Weise genommen eine Form dieser Art haben

$$dZ = Mdx + Ndy + Pd p + Qd q + Rd r + Sd s \quad \text{etc.},$$

woher die Variation derselben Größe Z sein wird

$$\delta Z = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} \quad \text{etc.}$$

Weil nun $\delta \int Zdx = \int \delta Zdx$ ist, wird sein

$$\delta \int Zdx = \int N\delta ydx + \int Pd\delta y + \int \frac{Qdd\delta y}{dx} + \int \frac{Rd^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.};$$

damit nun in der weiteren Reduktion der Ausdruck δy nicht stört, wollen wir durchgehend $\delta y = w$ setzen und die Reduktionen werden sich so verhalten

$$\begin{aligned} \int Pd w &= Pw - \int w dP, \\ \int \frac{Qdd w}{dx} &= \frac{Qdw}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} dw = \frac{Qdw}{dx} - \frac{wdQ}{dx} + \int \frac{wddQ}{dx}, \\ \int \frac{Rd^3 w}{dx^2} &= \frac{Rdd w}{dx^2} - \frac{dRdw}{dx^2} + \frac{wddR}{dx^2} - \int \frac{wd^3 R}{dx^2} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

All diese Werte werden gesammelt und für w werde wieder δy eingesetzt, und so wird erhalten werden

$$\begin{aligned} \delta \int Zdx &= \int \delta ydx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} \right) \\ &\quad + \delta y \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d\delta y}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddS}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
& + \frac{dd\delta y}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{d^3\delta y}{dx^3} (S - \text{etc.}) \\
& + \text{etc.,}
\end{aligned}$$

in welchem Ausdruck das Differential dx konstant genommen wurde.

KOROLLAR 1

§36 Es besteht also die Variation der Integralformel $\int Zdx$ aus dem Integralanteil

$$\int \delta y dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc.} \right)$$

und absoluten Anteilen, die außer der Variation δy selbst auch die Differentiale $d\delta y$, $dd\delta y$, $d^3\delta y$ etc. umfassen.

KOROLLAR 2

§37 Den Integralanteil aber haben wir durch die verwendeten Reduktionen so geordnet, dass er nur die Variation δy selbst umfasste und frei von ihren Differentialen dargeboten werden würde, welche Form bei der Anwendung des Variationskalküls einen sehr großen Nutzen verschafft.

PROBLEM 4

§38 Wenn in der Integralformel $\int Zdx$ die Größe Z nicht nur die Buchstaben x und y mit deren Relationen der Differentiale p, q, r, s etc., sondern auch die Integralformel $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ wie auch immer umfassen würde, in welcher \mathfrak{Z} aber eine Funktion von x, y, p, q, r, s etc. sei, ist die Variation jener Integralformel $\int Zdx$ zu bestimmen.

LÖSUNG

Weil die Größe Z außer den Größen x, y, p, q, r, s etc. auch die Integralformel $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ involviert, wird sie als Funktion der Größen Π, x, y, p, q, r, s etc. angesehen werden können, woher, wenn sie auf gewohnte Weise differentiiert wird, eine solche Form hervorgehen wird

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds \quad \text{etc.},$$

woher die Variation von Z gefolgert wird

$$\delta Z = L\delta\Pi + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \text{etc.}$$

Weil darauf \mathfrak{Z} eine Funktion von x, y, p, q, r, s etc. ist, werde festgelegt

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \mathfrak{S}ds + \text{etc.},$$

und aus dem vorhergehenden Problem wird $\delta\Pi$ sein oder aber

$$\begin{aligned} \delta \int \mathfrak{Z} dx &= \int \delta y dx \left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{etc.} \right) \\ &+ \delta y \left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d\delta y}{dx} \left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d\mathfrak{S}}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d^2\delta y}{dx^2} \left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d^3\delta y}{dx^3} (\mathfrak{S} - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Oder es werde besser die erste Form

$$\delta \int \mathfrak{Z} dx = \int \mathfrak{N} \delta y dx + \int \mathfrak{P} d\delta y + \int \frac{\mathfrak{Q} d^2 \delta y}{dx} + \int \frac{\mathfrak{R} d^3 \delta y}{dx^2} + \int \frac{\mathfrak{S} d^4 \delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

genommen, und es wird wegen $\delta\Pi = \delta \int \mathfrak{Z} dx$ sein

$$\delta Z = L \int \mathfrak{N} \delta y dx + L \int \mathfrak{P} d\delta y + L \int \frac{\mathfrak{Q} d^2 \delta y}{dx} + L \int \frac{\mathfrak{R} d^3 \delta y}{dx^2} + L \int \frac{\mathfrak{S} d^4 \delta y}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$+N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qdd\delta y}{dx^2} + \frac{Rd^3\delta y}{dx^3} + \frac{Sd^4\delta y}{dx^4} + \text{etc.}$$

Weil also $\delta \int Zdx = \int \delta Zdx$ ist, werden wir haben:

$$\begin{aligned} \delta \int Zdx &= \int Ldx \int \mathfrak{N}\delta ydx + \int Ldx \int \mathfrak{P}d\delta y \\ &\quad + \int Ldx \int \frac{\mathfrak{Q}dd\delta y}{dx} + \int Ldx \int \frac{\mathfrak{R}d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \\ &+ \int N\delta ydx + \int Pd\delta y + \int \frac{Qdd\delta y}{dx} + \int \frac{Rd^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Es werde $\int Ldx = W$ oder $Ldx = dW$ gesetzt, und wegen

$$\begin{aligned} \int Ldx \int \mathfrak{N}\delta ydx &= W \int \mathfrak{N}\delta ydx - \int \mathfrak{N}W\delta ydx, \\ \int Ldx \int \mathfrak{P}d\delta y &= W \int \mathfrak{P}d\delta y - \int \mathfrak{P}Wd\delta y, \\ \int Ldx \int \frac{\mathfrak{Q}dd\delta y}{dx} &= W \int \frac{\mathfrak{Q}dd\delta y}{dx} - \int \frac{\mathfrak{Q}Wdd\delta y}{dx} \end{aligned}$$

werden wir erhalten:

$$\begin{aligned} \delta \int Zdx &= W \int \mathfrak{N}\delta ydx + W \int \mathfrak{P}d\delta y + W \int \frac{\mathfrak{Q}dd\delta y}{dx} + W \int \frac{\mathfrak{R}d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \\ &+ \int (N - \mathfrak{N}W)\delta ydx + \int (P - \mathfrak{P}W)d\delta y \\ &+ \int (Q - \mathfrak{Q}W)\frac{dd\delta y}{dx} + \int (R - \mathfrak{R}W)\frac{d^3\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Diese Formeln werden auf dieselbe Weise wie oben reduziert geben:

$$\begin{aligned} &\delta \int Zdx \\ &= W \int \delta ydx \left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ W\delta y \left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{dd\mathfrak{R}}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{Wd\delta y}{dx} \left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{Wdd\delta y}{dx^2} (\mathfrak{R} - \text{etc.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \delta y dx \left((N - \mathfrak{N}W) - \frac{d(P - \mathfrak{P}W)}{dx} + \frac{dd(Q - \mathfrak{Q}W)}{dx^2} - \frac{d^3(R - \mathfrak{R}W)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\
& + \delta y \left((P - \mathfrak{P}W) - \frac{d(Q - \mathfrak{Q}W)}{dx} + \frac{dd(R - \mathfrak{R}W)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
& + \frac{d\delta y}{dx} \left((Q - \mathfrak{Q}W) - \frac{d(R - \mathfrak{R}W)}{dx} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{dd\delta y}{dx^2} ((R - \mathfrak{R}W) - \text{etc.}) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

KOROLLAR 1

§39 Weil die verwendeten Reduktionen in jedem Fall leicht erledigt werden können, wird nach Vorausschicken von ihnen die gesuchte Variation auf diese Weise kürzer dargeboten werden, wobei $W = \int L dx$ gesetzt werde:

$$\begin{aligned}
\delta \int Z dx = W \int dx & \left(\mathfrak{N}\delta y + \frac{\mathfrak{P}d\delta y}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}dd\delta y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\
& + \int dx \left((N - \mathfrak{N}W)\delta y + (P - \mathfrak{P}W)\frac{d\delta y}{dx} + \right. \\
& \quad \left. (Q - \mathfrak{Q}W)\frac{dd\delta y}{dx^2} + (R - \mathfrak{R}W)\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).
\end{aligned}$$

KOROLLAR 2

§40 Und wenn die Größe Z darüber hinaus eine andere Integralformel $\Pi' = \int \mathfrak{Z}' dx$ involviert, sodass ist:

$$dZ = Ld\Pi + L'd\Pi' + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{etc.},$$

dann aber:

$$d\mathfrak{Z}' = \mathfrak{M}'dx + \mathfrak{N}'dy + \mathfrak{P}'dp + \mathfrak{Q}'dq + \mathfrak{R}'dr + \text{etc.},$$

wenn $\int L dx = W$, $\int L' dx = W'$ gesetzt wird und darüber hinaus zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} N - \mathfrak{N}W - \mathfrak{N}'W' &= (N); & P - \mathfrak{P}W - \mathfrak{P}'W' &= (P), \\ Q - \mathfrak{Q}W - \mathfrak{Q}'W' &= (Q); & R - \mathfrak{R}W - \mathfrak{R}'W' &= (R) \quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

wird die gesuchte Variation sein:

$$\begin{aligned} \delta \int Z dx &= W \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ W' \int dx \left(\mathfrak{N}' \delta y + \mathfrak{P}' \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}' \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}' \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ \int dx \left((N) \delta y + (P) \frac{d\delta y}{dx} + (Q) \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + (R) \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right). \end{aligned}$$

PROBLEM 5

§41 Wenn in der Formel $\int Z dx$ die Größe Z außer den Buchstaben x, y, p, q, r etc. die Integralformel $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ involviert, in welcher die Größe \mathfrak{Z} außer den Buchstaben x, y, p, q, r etc. darüber hinaus die Integralformel $\pi = \int \mathfrak{z} dx$ umfasst, wo aber \mathfrak{z} eine Funktion der Buchstaben x, y, p, q, r etc. allein ist, ist die Variation der Formel $\int Z dx$ zu finden.

LÖSUNG

Weil Z eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. und $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ ist, wird ihr Differential nach gewohntem Brauch von dieser Form sein:

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{etc.},$$

und daher ihre Variation

$$\delta Z = L \delta \Pi + N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + R \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.},$$

woher die gesuchte Variation sein wird:

$$\delta \int Z dx = \int \delta Z dx$$

$$= \int L dx \delta \Pi + \int dx \left(N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + R \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

Aber weil \mathfrak{Z} eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. und $\pi = \int \mathfrak{Z} dx$ ist, wird durch Differenzieren sein:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}d\pi + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.},$$

und daher ihre Variation

$$\delta \mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\delta\pi + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.},$$

woher, weil $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ ist, $\delta \Pi = \delta \int \mathfrak{Z} dx = \int \delta \mathfrak{Z} dx$ sein wird und deshalb dann auch:

$$\delta \Pi = \int \mathfrak{L} dx \delta \pi + \int dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right),$$

woher gefunden wird

$$\int L dx \delta \Pi = \int L dx \int \mathfrak{L} dx \delta \pi + \int L dx \int dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

Es ist also übrig, dass wir $\delta \pi$ bestimmen; es ist aber $\pi = \int \mathfrak{Z} dx$, und weil \mathfrak{z} eine Funktion nur der Buchstaben x, y, p, q, r etc. ist, werde durch Differenzieren

$$d\mathfrak{z} = m dx + n dy + p dp + q dq + r dr + \text{etc.},$$

woher ihre Variation gefolgert wird:

$$\delta \mathfrak{z} = n \delta y + p \frac{d\delta y}{dx} + q \frac{dd\delta y}{dx^2} + r \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.},$$

dann wird aber wegen $\delta \pi = \delta \int \mathfrak{z} dx = \int \delta \mathfrak{z} dx$ sein

$$\delta \pi = \int dx \left(n \delta y + p \frac{d\delta y}{dx} + q \frac{dd\delta y}{dx^2} + r \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

Deswegen werden wir haben

$$\int L dx \int \mathfrak{L} dx \delta \pi = \int L dx \int \mathfrak{L} dx \int dx \left(n \delta y + p \frac{d\delta y}{dx} + q \frac{dd\delta y}{dx^2} + r \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

Damit wir nun diese Formeln von den mehrfachen Integralzeichen befreien, wollen wir $\int L dx = W$ setzen und es wird sein

$$\int L dx \delta \Pi = W \delta \Pi - \int W d \delta \Pi,$$

aber ist es $d \delta \Pi = \delta \mathfrak{Z} dx$, woher gilt

$$\int L dx \delta \Pi = W \delta \Pi - \int W \delta \mathfrak{Z} dx$$

und daher

$$\begin{aligned} \int L dx \delta \Pi &= W \int \mathfrak{L} dx \delta \pi + W \int dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d \delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{d d \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\ &\quad - \int \mathfrak{L} W dx \delta \pi - \int W dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d \delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{d d \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right). \end{aligned}$$

Es sei $\int \mathfrak{L} dx = \mathfrak{W}$, es wird gelten

$$\int \mathfrak{L} dx \delta \pi = \mathfrak{W} \delta \pi - \int \mathfrak{W} \delta \mathfrak{Z} dx$$

und daher:

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{L} dx \delta \pi &= \mathfrak{W} \int dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d \delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{d d \delta y}{dx^2} + \mathfrak{r} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &\quad - \int \mathfrak{W} dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d \delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{d d \delta y}{dx^2} + \mathfrak{r} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right). \end{aligned}$$

Weiter werde $\int \mathfrak{L} W dx = \int W d \mathfrak{W} = \mathfrak{V}$ gesetzt, dass gilt:

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{L} W dx \delta \pi &= \mathfrak{V} \int dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d \delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{d d \delta y}{dx^2} + \mathfrak{r} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &\quad - \int \mathfrak{V} dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d \delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{d d \delta y}{dx^2} + \mathfrak{r} \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right). \end{aligned}$$

Aus all diesen wird die gesuchte Relation berechnet werden

$$\begin{aligned} \delta \int Z dx &= (W \mathfrak{W} - \mathfrak{V}) \int dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d \delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{d d \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\ &\quad - W \int \mathfrak{W} dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d \delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{d d \delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \mathfrak{V} dx \left(\mathfrak{n} \delta y + \mathfrak{p} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
& + W \int dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
& - \int W dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
& + \int dx \left(N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right).
\end{aligned}$$

KOROLLAR 1

§42 Wenn die Variation der Formel $\int Z dx$ vom Wert $x = 0$ bis hin zum bestimmten Wert $x = a$ gesucht wird, werden die Integrale $W = \int L dx$, $\mathfrak{W} = \int \mathfrak{L} dx$ und $\mathfrak{B} = \int W d\mathfrak{W}$ genommen, dass sie für $x = 0$ gesetzt verschwinden, dann aber für $x = a$ gesetzt $W = A$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ wird, welche Werte sich in der gefundenen Formel anstelle der Buchstaben W , \mathfrak{W} und \mathfrak{B} , wo sie außerhalb des Integralzeichens auftauchen, setzen lassen werden.

KOROLLAR 2

§43 Es werde also zur Abkürzung festgelegt:

$$\begin{aligned}
N + (A - W)\mathfrak{N} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{B})\mathfrak{n} &= (N), \\
P + (A - W)\mathfrak{P} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{B})\mathfrak{p} &= (P), \\
Q + (A - W)\mathfrak{Q} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{B})\mathfrak{q} &= (Q), \\
R + (A - W)\mathfrak{R} + (A\mathfrak{A} - \mathfrak{B} - A\mathfrak{W} + \mathfrak{B})\mathfrak{r} &= (R) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

und die gesuchte Variation der Formel $\int Z dx$ bis hin zum bestimmten Wert $x = a$ wird sein:

$$\int dx \left((N) \delta y + (P) \frac{d\delta y}{dx} + (Q) \frac{dd\delta y}{dx^2} + (R) \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

KOROLLAR 3

§44 Wenn daher nun hier die oberen Reduktionen verwendet werden, wird man dieselbe Variation so ausgedrückt finden:

$$\begin{aligned} \delta \int Z dx &= \int dx \delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{dd\delta y}{dx^2} ((R) - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

KOROLLAR 4

§45 Weil $\mathfrak{B} = \int W d\mathfrak{W}$ ist, wird $A\mathfrak{W} - \mathfrak{W} = \int (A - W) \mathfrak{L} dx$ sein; daher, wenn das Integral $\int (A - W) \mathfrak{L} dx = X$ gesetzt wird, so genommen, dass es für $x = 0$ gesetzt verschwindet, dann aber für $x = a$ gesetzt $X = B$ wird, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{L} dx &= W, \quad \text{und für } x = a \text{ gesetzt } W = A \text{ wird,} \\ \int (A - W) \mathfrak{L} dx &= X, \quad \text{und für } x = a \text{ gesetzt } X = B \text{ wird,} \end{aligned}$$

werden sich die oberen in Korollar 2 dargebotenen Werte so verhalten:

$$\begin{aligned} N + (A - W)\mathfrak{N} + (B - X)\mathfrak{n} &= (N), \\ P + (A - W)\mathfrak{P} + (B - X)\mathfrak{p} &= (P), \\ Q + (A - W)\mathfrak{Q} + (B - X)\mathfrak{q} &= (Q), \\ R + (A - W)\mathfrak{R} + (B - X)\mathfrak{r} &= (R) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

PROBLEM 6

§46 Wenn in der Integralformel $\Phi = \int Z dx$ die Größe Z außer den Buchstaben x, y, p, q, r etc. auch die Integralformel Φ selbst involviert, ist ihre Variation $\delta\Phi = \delta \int Z dx$ zu bestimmen.

LÖSUNG

Weil Z eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. ist und darüber hinaus die Integralformel $\Phi = \int Z dx$ selbst involviert, werde sie auf gewohnte Weise differentiiert und es gehe hervor

$$dZ = Ld\Phi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

Daher wird die Variation von Z natürlich sein

$$\delta Z = L\delta\Phi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.},$$

und daher wegen $\delta\Phi = \delta \int Z dx = \int \delta Z dx$

$$\delta\Phi = \int Ldx\delta\Phi + \int dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

Wir wollen $\delta\Phi = z$, weil es das ist, was gesucht wird, und der Kürze wegen festlegen

$$\int dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) = u,$$

sodass man $z = \int Lzdx + u$ und durch Differentieren $dz = Lzdx + du$ hat, und es wird durch Integrieren

$$z = e^{\int Ldx} \int e^{-\int Ldx} du$$

sein; es werde der Kürze wegen $\int Ldx = W$ gesetzt und man wird die gesuchte Variation haben

$$\delta \int Z dx = e^W \int e^{-W} dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

Wenn die Variation bis hin zu der gegebenen Grenze $x = a$ verlangt wird und dann $W = A$ wird, werde zur Abkürzung festgelegt

$$e^{A-W}N = (N), \quad e^{A-W}P = (P), \quad e^{A-W}Q = (Q) \quad \text{etc.},$$

und es wird nach den obigen Reduktionen die Variation sein

$$\begin{aligned} \delta \int Z dx &= \int dx \delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{dd\delta y}{dx^2} ((R) - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

KOROLLAR

§47 Wenn also die zu variierende Größe Φ durch diese Differentialgleichung $d\Phi = Zdx$ bestimmt wird, in welcher Z irgendwie die Größe Φ selbst und die Größen x, y, p, q, r etc. involviert, wird ihre Variation $\delta\Phi$ durch dieses Problem angegeben werden können.

PROBLEM 7

§48 Wenn in der Integralformel $\Phi = \int Zdx$ die Größe Z außer den Buchstaben x, y, p, q, r etc. nicht nur die Größe Φ selbst, sondern darüber hinaus noch eine andere Integralformel $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ auf irgendeine Weise verwickelt, in welcher aber die Größe \mathfrak{Z} nur durch Buchstaben x, y, p, q, r etc. gegeben sei, ist die Variation dieser Formel $\delta\Phi = \delta \int Zdx = \int \delta Zdx$ zu finden.

LÖSUNG

Weil Z eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. und darüber hinaus der Formeln $\Phi = \int Z dx$ und $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ ist, liefere sie durch Differentieren

$$dZ = Kd\Phi + Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{etc.},$$

woher ihre Variation sein wird

$$\delta Z = K\delta\Phi + L\delta\Pi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Weiter aber, weil \mathfrak{Z} eine Funktion nur der Buchstaben x, y, p, q, r etc. ist, werde festgelegt

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.},$$

und es wird wegen $\delta\Pi = \int \delta\mathfrak{Z} dx$ sein

$$\delta\Pi = \int dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \mathfrak{R}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \right).$$

Es werde wie zuvor festgelegt

$$\delta\Phi = z \quad \text{und} \quad L\delta\Pi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} = u;$$

wegen $\delta\Phi = \int \delta Z dx = z$ wird $\delta Z = \frac{dz}{dx}$ und daher $\frac{dz}{dx} = Kz + u$ sein; daher entsteht

$$z = e^{\int K dx} \int e^{-\int K dx} u dx = \delta\Phi;$$

es sei $\int K dx = V$ und es wird sein

$$\begin{aligned} e^{-\int K dx} u dx &= e^{-V} L dx \int dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\ &\quad + e^{-V} dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right), \end{aligned}$$

es werde weiter $\int e^{-V} L dx = W$ gesetzt, und durch Integrieren wird die gesuchte Variation sein

$$\delta\Phi = e^V W \int dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -e^V \int W dx \left(\mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q} \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\
& + e^V \int e^{-V} dx \left(N \delta y + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right).
\end{aligned}$$

Wenn die Variation bis hin zur gegebenen Grenze $x = a$ verlangt wird und $V = A$ und $W = B$ für $x = a$ wird, dann werde der Kürze wegen festgelegt:

$$\begin{aligned}
e^{A-V} N + e^A (B - W) \mathfrak{N} &= (N), \\
e^{A-V} P + e^A (B - W) \mathfrak{P} &= (P), \\
e^{A-V} Q + e^A (B - W) \mathfrak{Q} &= (Q), \\
e^{A-V} R + e^A (B - W) \mathfrak{R} &= (R) \\
&\text{etc.,}
\end{aligned}$$

wonach die Variation der Formel $\Phi = \int Z dx$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt sein wird:

$$\begin{aligned}
\delta \Phi &= \int dx \delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\
&+ \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.} \right) \\
&+ \frac{dd\delta y}{dx^2} ((R) - \text{etc.})
\end{aligned}$$

KOROLLAR

§49 So wird also die Variation der durch die Differentialgleichung $d\Phi = Z dx$ gegebenen Größe bestimmt, in welcher Z nicht nur die außer den Buchstaben x, y, p, q, r etc. Φ selbst, sondern darüber hinaus auch die Integralformel $\int \mathfrak{Z} dx = \Pi$ wie auch immer involviert, solange \mathfrak{Z} allein durch die Buchstaben x, y, p, q, r etc. bestimmt wird.

PROBLEM 8

§50 Wenn in der Integralformel $\Phi = \int Z dx$ die Größe Z außer den Buchstaben x, y, p, q, r etc. die Integralformel $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ involviert, hier aber die Größe \mathfrak{Z} außer

den Buchstaben x, y, p, q, r etc. die Integralformel $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ selbst enthält, ist die Variation der vorgelegten Formel $\Phi = \int Z dx$ zu bestimmen.

LÖSUNG

Weil Z eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. und von $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ ist, wird ihr Differential von dieser Art sein:

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

daher wird ihre Variation sein

$$\delta Z = L\delta\Pi + N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.},$$

woher man wegen $\delta\Phi = \int \delta Z dx$ haben wird:

$$\delta\Phi = \int Ldx\delta\Pi + \int dx \left(N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

Aber weil \mathfrak{Z} eine Funktion von x, y, p, q, r etc. und $\Pi = \int \mathfrak{Z} dx$ ist, sei ihr Differential:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}d\Pi + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \text{etc.},$$

und es wird sein

$$d\mathfrak{Z} = \frac{d\delta\Pi}{dx} = \mathfrak{L}\delta\Pi + \mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Es werde $\int \mathfrak{L}dx = \mathfrak{W}$ gesetzt, und es wird sein:

$$\delta\Pi = e^{\mathfrak{W}} \int e^{-\mathfrak{W}} dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

Es werde $\int e^{\mathfrak{W}} Ldx = W$ und es wird erhalten werden:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= W \int e^{-\mathfrak{W}} dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \\ &\quad - \int e^{-\mathfrak{W}} W dx \left(\mathfrak{N}\delta y + \mathfrak{P}\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{Q}\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

$$+ \int dx \left(Ndy + P \frac{d\delta y}{dx} + Q \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.} \right).$$

Wenn diese Variation bis hin zur Grenze $x = a$ ausgedehnt werden muss und für $x = a$ gesetzt $W = A$ wird, wird wieder der Kürze wegen alles wie folgt benannt

$$\begin{aligned} N + e^{-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{N} &= (N), \\ P + e^{-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{P} &= (P), \\ Q + e^{-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{Q} &= (Q) \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

und es wird durch Einführen der oben erläuterten Reduktionen die Variation der Integralformel $\Phi = \int Zdx$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt sein

$$\begin{aligned} \delta \int Zdx &= \int dx \delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ &+ \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{d\delta y}{dx} \left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{dd\delta y}{dx^2} ((R) - \text{etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

BEMERKUNG

§51 Der Gebrauch dieses Problems wird beim Herabgleiten von Körpern über gekrümmten Linien in einem resistierendem Medium erkannt, während der Körper von irgendwelchen Kräften beeinflusst wird, wenn wir die Variation der Zeit des Herabsinkens bestimmen wollen, während die Kurve auf irgendeine Weise verändert wird. Es bezeichne in diesem Fall Φ die Zeit des Herabsinkens durch den Bogen hindurch, welcher der Abszisse x entspreche, und es sei die Ordinate gleich y und Π die der erworbenen Geschwindigkeit geschuldete Höhe; und die Zeit des Herabsinkens wird sein

$$\Phi = \int \frac{dx \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{\Pi}}$$

nach Setzen von $dy = p dx$, sodass $dx\sqrt{1+pp}$ das Bogenelement bezeichnet. Aber aus den Kraftwirkungen wird sein

$$d\Pi = Xdx + Ydy - V\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

wo X und Y Funktionen von x und y bezeichnen, und V eine Funktion von Π , welche dem Widerstand proportional ist. Es wird also wegen $dy = p dx$ gelten

$$\Pi = \int (X + Yp - V\sqrt{1+pp})dx$$

und daher

$$\mathfrak{Z} = X + Yp - V\sqrt{1+pp},$$

während $Z = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{\Pi}}$ ist.

KOROLLAR

§52 Wenn zur Ähnlichkeit der Werte (N) , (P) , (Q) festgelegt wird

$$M + e^{-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{W} = (M),$$

wird $(M)dx + (N)dy + (P)dp + (Q)dq + (R)dr + \text{etc.}$ das wahre Differential dieser Formel sein:

$$Z + e^{-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{Z}.$$

SCHLUSSFOLGERUNG

§53 Was für eine Integralformel $\Phi = \int Zdx$ also auch immer vorgelegt wird, deren Variation gefunden werden muss, ihre Variation bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt wird immer auf dieser Weise ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \int dx \delta y \left((N) - \frac{d(P)}{dx} + \frac{dd(Q)}{dx^2} - \frac{d^3(R)}{dx^3} + \frac{d^4(S)}{dx^4} - \text{etc.} \right) \\ & + \delta y \left((P) - \frac{d(Q)}{dx} + \frac{dd(R)}{dx^2} - \frac{d^3(S)}{dx^3} + \text{etc.} \right) \\ & + \frac{d\delta y}{dx} \left((Q) - \frac{d(R)}{dx} + \frac{dd(S)}{dx^2} - \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d\delta y}{dx^2} \left((R) - \frac{d(S)}{dx} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{d^3\delta y}{dx^3} ((S) - \text{etc.}) \\
& + \text{etc.},
\end{aligned}$$

wobei das Element dx konstant genommen wurde. Wie aber die Buchstaben (N) , (P) , (Q) , (R) , (S) etc. sich verhalten werden, das wird in jedem Fall klar werden.

FALL I

§54 Wenn $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \text{etc.}$ ist, wird gelten

$$(N) = N, \quad (P) = P, \quad (Q) = Q, \quad (R) = R, \quad (S) = S \quad \text{etc.}$$

FALL II

§55 Wenn $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ ist, während $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ ist und gilt

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.},$$

sei $\int Ldx = W$ und für $x = a$ gesetzt werde $W = A$, wonach sein wird:

$$\begin{aligned}
(N) &= N + (A - W)\mathfrak{N} & (P) &= P + (A - W)\mathfrak{P} \\
(Q) &= Q + (A - W)\mathfrak{Q} & (R) &= R + (A - W)\mathfrak{R} \\
(S) &= S + (A - W)\mathfrak{S} & &\text{etc.}
\end{aligned}$$

FALL III

§56 Wenn galt

$$dZ = Ld\Pi + L'd\Pi' + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

während $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ und $\Pi' = \int \mathfrak{Z}'dx$ ist, dann aber auch:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.},$$

$$d\mathfrak{Z}' = \mathfrak{M}'dx + \mathfrak{N}'dy + \mathfrak{P}'dp + \mathfrak{Q}'dq + \mathfrak{R}'dr + \text{etc.},$$

werde $\int Ldx = W$ und $\int L'dx = W'$ gesetzt, und für $x = a$ gesetzt werde $W = A$ und $W' = A'$ sein, wonach sein wird

$$\begin{aligned}(N) &= N + (A - W)\mathfrak{N} + (A' - W')\mathfrak{N}' \\(P) &= P + (A - W)\mathfrak{P} + (A' - W')\mathfrak{P}' \\(Q) &= Q + (A - W)\mathfrak{Q} + (A' - W')\mathfrak{Q}' \\(R) &= R + (A - W)\mathfrak{R} + (A' - W')\mathfrak{R}' \\&\text{etc.}\end{aligned}$$

FALL IV

§57 Wenn Z die Integralformel $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ enthält, dass gilt:

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

die Größe \mathfrak{Z} hingegen die Integralformel $\pi = \int \mathfrak{z}dx$, dass gilt:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}d\pi + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.},$$

aber \mathfrak{z} kein weiteres Integral involviert, sodass gilt:

$$d\mathfrak{z} = mdx + ndy + pdp + qdq + rdr + \text{etc.},$$

Es werde $\int Ldx = W$ festgelegt und nach Setzen von $x = a$ werde $W = A$; dann aber werde $\int (A - W)\mathfrak{L}dx = \mathfrak{W}$ festgelegt und im Fall $x = a$ werde $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$ sein, wonach dann sein wird:

$$\begin{aligned}(N) &= N + (A - W)\mathfrak{N} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{W})\mathfrak{n}, \\(P) &= P + (A - W)\mathfrak{P} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{W})\mathfrak{p}, \\(Q) &= Q + (A - W)\mathfrak{Q} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{W})\mathfrak{q}, \\(R) &= R + (A - W)\mathfrak{R} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{W})\mathfrak{r} \\&\text{etc.}\end{aligned}$$

FALL V

§58 Wenn nun Z die Formel $\Phi = \int Zdx$ selbst enthält, sodass ist

$$dZ = Kd\Phi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

werde $\int Kdx = V$ festgelegt und für $x = a$ gesetzt sei $V = C$, es wird sein:

$$(N) = e^{C-V}N, \quad (P) = e^{C-V}P, \quad (Q) = e^{C-V}Q, \quad (R) = e^{C-V}R \quad \text{etc.}$$

FALL VI

§59 Wenn Z außer der Formel $\Phi = \int Zdx$ eine andere Integralformel $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ enthält und es ist:

$$dZ = Kd\Phi + Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

dann aber \mathfrak{Z} keine Integralformel involviert:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.},$$

sei $\int Kdx = V$ und für $x = a$ gesetzt werde $V = C$. Des Weiteren sei $\int e^{C-V}Ldx = W$ und für $x = a$ gesetzt werde $W = A$, und es wird sein

$$\begin{aligned} (N) &= e^{C-V}N + (A - W)\mathfrak{N}, \\ (P) &= e^{C-V}P + (A - W)\mathfrak{P}, \\ (Q) &= e^{C-V}Q + (A - W)\mathfrak{Q}, \\ (R) &= e^{C-V}R + (A - W)\mathfrak{R} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

FALL VII

§60 Wenn Z die Formel $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ enthält, dass gilt:

$$dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

dann aber \mathfrak{Z} erneut dieselbe Formel $\Pi = \int \mathfrak{Z}dx$ involviert, dass gilt:

$$d\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}d\Pi + \mathfrak{M}dx + \mathfrak{N}dy + \mathfrak{P}dp + \mathfrak{Q}dq + \mathfrak{R}dr + \text{etc.},$$

Es werde $\int \mathfrak{L}dx = \mathfrak{W}$ festgelegt und für $x = a$ gesetzt werde $\mathfrak{W} = \mathfrak{A}$; des Weiteren werde festgelegt

$$\int e^{-\mathfrak{A}+\mathfrak{W}} L dx = W$$

und für $x = a$ gesetzt werde $W = A$, und es wird sein:

$$\begin{aligned}(N) &= N - e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{N}, \\(P) &= P - e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{P}, \\(Q) &= Q - e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{Q}, \\(R) &= R - e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{W}}(A - W)\mathfrak{R} \\&\text{etc.}\end{aligned}$$

§61 Auf die gleiche Weise lässt sich diese Untersuchung auf andere einander verschachtelte Formeln ausdehnen, aber weil solche kaum irgendwann aufzutreiben pflegen, wäre die Arbeit überflüssig. Weil ich also die Variationen so einfacher wie mehrfach ineinander verschachtelter Integralformeln zu bestimmen gelehrt habe, scheint das Variationskalkül fast vollkommen abgehandelt; auf welche Weise nämlich auch immer die Größe zu variieren war, so aus absoluten Formeln wie Integralen zusammengesetzt, es wird mit Hilfe gewöhnlicher Differentiation ihre Variation gefunden werden können. Wie wenn beispielsweise die zu variierende Größe U irgendwelche Integralformeln

$$\Phi = \int Z dx, \quad \Phi' = \int Z' dx, \quad \Phi'' = \int Z'' dx \quad \text{etc.}$$

enthält, werde sie auf gewohnte Weise differentiiert und es gehe hervor:

$$\delta U = K d\Phi + K' d\Phi' + K'' d\Phi'' \quad \text{etc.,}$$

dann ist ersichtlich, dass ihre Variation diese sein wird:

$$\delta U = K \delta\Phi + K' \delta\Phi' + K'' \delta\Phi'' \quad \text{etc.,}$$

aber die Variationen $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$, $\delta\Phi''$ etc. werden durch die gerade erläuterten Vorschriften angegeben werden. Auf die gleiche Weise ist aber klar, dass die Variation δU immer in einer Form ausgedrückt sein wird, dass ist:

$$\delta V = \int (A) dx \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \text{etc.,}$$

wo (A) , (B) , (C) etc. aus den oben angegebenen Regeln zu finden sind. Es wird aber gefällig sein, dass der Gebrauch dieses Korollars bei der Lösung des hochberühmten isoperimetrischen Problems, das im weitesten Sinne aufgefasst wurde, kurz aufgezeigt wird.

ANWENDUNG DES VARIATIONSKALKÜLS AUF DIE LÖSUNG DES IM WEITESTEN SINNE AUFGEFASSTEN ISOPERIMETRISCHEN PROBLEMS

§62 Das erste sich hierauf beziehende Problem kann so ausgesprochen werden, dass unter allen über derselben gegebenen Basis $x = a$ zu errichtenden Kurven eine gewisse Formel U einen maximalen oder minimalen Wert erhält. Auch wenn nämlich die Formulierung des Problems nur Kurven derselben Länge umfasst, wird dennoch diese Bedingung, dass sein Umfang sich weiter erstreckt, angenehm weggelassen und auch ist durch Erwähnung der einen einzigen Formel U , deren Wert maximal oder minimal werden muss, seine Tragweite nicht anzusehen eingeschränkt zu sein, nachdem ich im Allgemeinen bewiesen hatte, wenn unter allen über derselben Basis $x = a$ zu errichtenden Kurven, für welche die Formel V denselben Wert erhalte, die bestimmt werden muss, in welcher der Wert der Formel U maximal oder minimal wird, dass die Frage darauf zurückgeführt wird, dass unter ganz und gar allen über der Basis $x = a$ zu errichtenden Kurven die bestimmt wird, für welche diese zusammengesetzte Formel $\alpha V + \beta U$ den maximalen oder minimalen Wert erhält. Dennoch kann auch die Begründung dieser Reduktion aus den Prinzipien des Variationskalküls selbst in verständlicher Weise erklärt werden.

§63 Aber diese Frage, von der Betrachtung gekrümmter Linien losgelöst, kann auf diese Weise vorgelegt werden:

Nach Vorlegen irgendeiner Formel U ist ihre Relation zwischen den zwei Variablen x und y zu bestimmen, wenn durch welche der Wert von U bestimmt wird und vom Wert $x = 0$ bis hin zum Wert $x = a$ erstreckt wird, und er maximal oder minimal hervorgehen wird.

Wir wollen also die Relation zwischen x und y als schon gefunden ansehen, sodass daher der maximale oder minimale Wert von U entsteht; und es ist klar, wenn die Relation zwischen x und y unendlich wenig verändert wird, dass daher keine Veränderung im Wert von U entstehen darf; oder, was auf dasselbe zurückgeht, die Variation von U oder δU gleich Null sein muss; und so wird die Gleichung $\delta U = 0$ die zwischen x und y gesuchte Relation umfassen.

§64 Die Variation δU haben wir aber daher zu bestimmen gelehrt, dass wir für jeden Wert von x den Wert von y , der selbigem vermöge der gesuchten Relation zufiele, um ein gewisses Stück δy vermehrt zu werden angenommen haben. Weil also die gesuchte Relation sich unter ganz und gar allen möglichen sich dieser Eigenschaft erfreuen muss, muss die Variation δU immer gleich Null sein, auf welche Weise auch immer die einzelnen Werte von y um solche Stücke δy vermehrt werden und auf welche Weise auch immer diese Vermehrungen beschaffen waren, weil sie ja völlig beliebig und auf keine Weise voneinander abhängig sind. Und es ist auch nicht nötig, dass allen Werten von y Variationen dieser Art zugeteilt werden, aber, ob nur einziger oder zwei oder wie viele auch immer nach Belieben variiert werden, es ist immer gleichermaßen notwendig, dass die Variation von U , sofern er von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt wird, ergießt, verschwindet.

§65 Aus dem aber, was oben angegeben worden ist, ist es klar, dass die Variation von U immer auf diese Weise ausgedrückt wird, dass gilt:

$$\delta U = \int (A) dx \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{dd\delta y}{dx^2} \text{ etc.},$$

die einzelnen Teile welcher Form getrennt voneinander betrachtet werden sollten. Aber außer dem ersten Integralglied hängen die übrigen Anteile $(B)\delta y$, $(C)\frac{d\delta y}{dx}$ etc. nur von der Variation des letzten Wertes y , der $x = a$ entspricht, ab und verwickeln keine Art der Variation der vorhergehenden; damit nämlich die ganze Relation von U erhalten wird, muss im gefundenen Ausdruck überall $x = a$ gesetzt werden, was in den einzelnen Teilen außer dem ersten tatsächlich getan werden kann, und so wird in ihnen δy die Variation bezeichnen, die allein dem letzten Wert von y zugeteilt wird und die ganz und gar beliebig ist und auch nicht von den vorhergehenden abhängt.

Daher ist ersichtlich, wenn das Integralglied nicht vorhanden wäre, dass aus den übrigen Teilen überhaupt nichts für die Relation zwischen x und y gefolgert werden kann.

§66 Aber das Integralglied $\int (A) dx \delta y$ involviert auch die Variationen, die allen vorhergehenden Werten von y zugeteilt werden, während es die Summe aller aus der Variation der einzelnen Werte von y herstammenden Elemente $(A) dx \delta y$ enthält. So, wenn von selbigen nur ein einziger dem betrachteten x – es hätte einen bestimmten Wert – variiert wird oder um das Stück δy vermehrt wird, wäre jenes Integral nur gleich $(A) dx \delta y$ und man hätte nichts zu Summierendes; wenn aber darüber hinaus der folgende $x + dx$ entsprechende Wert y' um das Stück $\delta y'$ vermehrt wird und für $x + dx$ anstelle von x gesetzt die Funktion (A) in $(A)'$ übergeht, wird das Integralglied aus diesen zwei Teilen bestehen:

$$(A) dx \delta y + (A)' dx \delta y'.$$

Auf die gleiche Weise, wenn drei oder mehr aufeinander folgende Werte y, y', y'', y''', y'''' etc. um die Stücke $\delta y, \delta y', \delta y'', \delta y'''$ etc. vermehrt werden, wird das Integralglied diesem Ausdruck gleich werden:

$$(A) dx \delta y + (A)' dx \delta y' + (A)'' dx \delta y'' + (A)''' dx \delta y''' + \text{etc.},$$

welche Reihe so rückwärts bis hin zur Grenze $x = 0$ wie vorwärts bis hin zur Grenze $x = a$ festgesetzt aufgefasst werden kann.

§67 Auch wenn also die Variation δU gegen die bestimmte Grenze $x = a$ hin beschränkt ist, umfasst sie dennoch wegen des Integralglieds alle dazwischen liegenden Variationen; daher, wenn wir für die übrigen absoluten Anteile, die nur auf die letzte Grenze $x = a$ bezogen werden, der Kürze wegen I schreiben, wird die Variation δU so ausgedrückt sein, dass gilt:

$$\delta U = (A) dx \delta y + (A)' dx \delta y' + (A)'' dx \delta y'' + (A)''' dx \delta y''' + \text{etc.} + I,$$

die, damit dem Problem genügt wird, gleich Null werden muss. Weil aber die Variationen $\delta y, \delta y', \delta y''$ etc. nicht voneinander abhängen, sondern die Einzelnen lediglich beliebig sind, kann jene Annihilation nur stattfinden, wenn die einzelnen Teile jeweils verschwinden; daher ist es notwendig, dass gilt:

$$(A) = 0, \quad (A)' = 0, \quad (A)'' = 0, \quad (A)''' = 0 \quad \text{etc.},$$

welche Gleichungen alle in dieser einen unbestimmten $(A) = 0$ enthalten sind oder, welcher Wert auch immer x zugeteilt wird, es muss immer $(A) = 0$ sein, und in dieser Gleichung ist die gesuchte Relation zwischen x und y enthalten.

§68 Man bestaune und bewundere also diese leichte Lösung des vorgelegten Problems, in welchem die Relation zwischen x und y verlangt wird, aus welcher für die vorgeschriebene Formel U , nachdem ihr Wert von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt worden war, der maximale oder minimale Wert resultiere. Es werde natürlich die Variation von U , gleichermaßen von der Grenze $x = 0$ aus bis hin zu $x = a$ erstreckt, gesucht, die durch die oben angegebenen Vorschriften eine Form dieser Art haben muss:

$$\delta U = \int (A) dx \delta y + (B) \delta y + (C) \frac{d\delta y}{dx} + (D) \frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.},$$

und daher würde allein aus dem Integralglied $\int (A) dx \delta y$ die zwischen x und y gesuchte Relation so bestimmt werden, dass $(A) = 0$ ist, die übrigen Teile aber, weil sie nur den letzten Wert von y betreffen, tragen nichts zur unbestimmten Relation zwischen x und y bei, die verlangt wird.

§69 Dennoch können diese letzten Teile zur genaueren Bestimmung der gefundenen Relation dienen; wie nämlich nur Teile dieser Art hinzukommen, so involviert im Integralglied $\int (A) dx \delta y$ die Funktion (A) das Verhältnis der Differentiale $\frac{dy}{dx} = p$ oder auch die Verhältnisse der höheren Differentiale, natürlich $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ etc. Wann immer aber dies passiert, wird die Gleichung $(A) = 0$ eine differentiale entweder ersten oder auch höheren Grades sein; und so wird die gesuchte Integration zwischen x und y erst nach einer oder mehreren Integrationen gefunden. Weil aber eine beliebige Integration eine beliebige konstante Größe einbringt, wird auf diese Weise zu einer zu allgemeinen endlichen Gleichung gelangt werden und es wird nun die neue Frage auftreten, wie diese beliebigen Konstanten bestimmt werden müssen, dass der Wert von U als der größte oder kleinste aller hervorgeht. Weil nämlich jede beliebige Bestimmung jener Konstante per se mit der Eigenschaft des Maximums oder Minimums versehen ist, wird hier weiter entweder das Maximums der Maxima oder das Minimum der Minima zu finden übrig gelassen.

§70 Um also dieses neue hinzukommende Problem aufzulösen, werden die von jenem Integralzeichen nicht betroffenen Teile verwendet werden können. Die durch die Integrationen eingebrachten Konstanten wird es natürlich so zu bestimmen gefällig sein, dass für $x = a$ gesetzt die einzelnen Koeffizienten von δy , $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{dd\delta y}{dx^2}$ etc. jeweils verschwinden, oder dass in diesem Fall diesen Bedingungen genügt wird:

$$(B) = 0, \quad (C) = 0, \quad (D) = 0 \quad \text{etc.}$$

Darauf, weil sich die beiden Grenzen $x = 0$ und $x = a$ miteinander vertauschen lassen, wird auch für $x = 0$ dafür zu sorgen sein, dass $(B) = 0$, $(C) = 0$, $(D) = 0$ etc. wird. Denn auch wenn die Teile, welche dies erfordern, in unserer Gleichung nicht enthalten sind, sind sie dennoch im Integralglied enthalten sein anzusehen.

§71 Aus denselben Prinzipien können auch Probleme, die ich zur relativen Methode gezählt habe, gelöst werden; diese Probleme lassen sich aber so allgemein aussprechen:

Unter allen Relationen, in denen y durch x bestimmt wird, die sich dieser gemeinsamen Eigenschaft erfreuen, dass sie für diese Formel \mathfrak{U} für $x = a$ gesetzt denselben Wert anbieten, ist die Relation zu bestimmen, aus welcher die Formel U , wenn sie freilich von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt wird, den maximalen oder minimalen Wert erhält.

Hier sind also die Variationen, die den einzelnen Werten von y entsprechen, nicht alle beliebig, sondern so festzulegen, dass $\delta\mathfrak{U} = 0$ wird, wenn freilich ihr Wert von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = a$ erstreckt wird. Dann aber erfordert die Natur des Maximums oder Minimums auch, dass gemäß derselben Erstreckung wie zuvor $\delta U = 0$ ist.

§72 Durch die zuvor erläuterte Methode werde also die Variation der Formel \mathfrak{U} , die gemeinsam sein muss, wie der der Formel U , die maximal oder minimal werden muss, gesucht, welche Variation von der Grenze $x = 0$ aus bis hin zur Grenze $x = a$ zu erstrecken ist; und die gesuchte Relation zwischen x und y wird aus der Verbindung dieser zwei Gleichungen $\delta\mathfrak{U} = 0$ und $\delta U = 0$

zu finden sein. Aber diese Reduktionen werden so ausgedrückt gefunden werden:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{U} &= \int (\mathfrak{A})dx\delta y + (\mathfrak{B})\delta y + (\mathfrak{C})\frac{d\delta y}{dx} + (\mathfrak{D})\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.}, \\ \delta U &= \int (A)dx\delta y + (B)\delta y + (C)\frac{d\delta y}{dx} + (D)\frac{dd\delta y}{dx^2} + \text{etc.},\end{aligned}$$

wo über die vom Integralzeichen freien Glieder festzuhalten ist, was ich oben schon bemerkt habe; und daher wird die zwischen x und y gesuchte Relation nur aus den Integralgliedern derviert werden müssen.

§73 Daher werden wir deshalb die zwei folgenden Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A})\delta y + (\mathfrak{A})'\delta y' + (\mathfrak{A})''\delta y'' + (\mathfrak{A})'''\delta y''' + \text{etc.} &= 0, \\ (A)\delta y + (A)'\delta y' + (A)''\delta y'' + (A)'''\delta y''' + \text{etc.} &= 0,\end{aligned}$$

durch deren erste die der vorgeschriebenen gemeinsamen Bedingung entsprechende Annahme der Variationen $\delta y, \delta y', \delta y''$ etc. bestimmt wird, welche darauf in die andere eingeführt die gesuchte Relation aufzeigen wird. Es können also alle Variationen $\delta y, \delta y', \delta y''$ etc. außer einer wie beliebige angesehen werden, welche eine natürlich aus der Gleichung zu bestimmen ist. Nun ist aber offenkundig, nachdem eine so angenommen worden war, dass der ersten Gleichung genügt wird, dass dann zugleich den anderen Genüge geleistet werden wird, indem für n irgendeine konstante Größe genommen wird.

§74 Das vorgelegte Problem wird also mit dieser Gleichung aufgelöst:

$$\alpha(A) + \beta(\mathfrak{A}) = 0,$$

nachdem für α und β gewissen konstanten Größen genommen wurden. Dieselbe Lösung wäre aber hervorgegangen, wenn unter ganz und gar allen Relationen zwischen x und y die herausgesondert werden müsste, woher die Formel $\alpha U + \beta \mathfrak{U}$ den maximalen oder minimalen Wert erhielte; daher wird zugleich eingesehen, dass die zwei vorgelegten Formeln \mathfrak{U} und U untereinander vertauscht werden können und all dieses, was ich in meinem Traktat angemerkt habe, daher um vieles klarer wird. Auf die gleiche Weise nämlich wird sich die Sache verhalten, wenn nicht eine einzige Formel \mathfrak{U} , sondern mehrere gemeinsam sein müssen; und so werde nach der Grundlegung des Variationskalküls alle Probleme dieser Art sehr leicht und sehr kurz erledigt.